Martin Erik Horn HTW Berlin

Verstecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen!

Aufbauend auf einer Vielzahl an fachlichen und fachdidaktischen Ausarbeitungen hat sich im englischen Sprachraum in den vergangenen Jahrzehnten ein intensiver Austausch zur Geometrischen Algebra entwickelt. Beispielhaft sei hier auf die Arbeiten (Snygg 1997), (Hestenes 2002, 203a, b, 2013 & 2015), (Doran & Lasenby 2003), Parra Serra (2009) verwiesen. Diese nahezu ausschließlich englisch geführte Diskussion ist im deutschsprachigen Raum bisher auf ein nur geringes Interesse seitens der hochschulischen Fachdidaktiken gestoßen.

Angesichts der strukturellen Eleganz, der Einfachheit, der Wirkmächtigkeit und der didaktischen Tiefe, die die Nutzung der Geometrischen Algebra zeigt, verwundert diese Zurückhaltung. Da es kaum kognitive Hürden sein dürften, die eine fachphysikalische und physikdidaktische Einbindung von Pauli- und Dirac-Algebren in die Modellierung physikalischer Sachverhalte verhindern, ist davon auszugehen, dass es emotionale Hürden sind, die von einer Beschäftigung mit der Geometrischen Algebra abhalten.

Zur Umgehung dieser emotionalen Hürden wird vorgeschlagen, Pauli- und Dirac-Algebren mathematisch so zu verstecken, dass eine Beschäftigung mit ihnen vordergründig nicht auffällt und erst bei einer tiefergehenden Analyse durch emotional blockierte Lernende entdeckt werden wird. Dabei werden Kenntnisse im Sinne eines kognitiven Konflikts (Krüger et al. 2018, Kap. 4) verfremdet und infrage gestellt (Nerdel 2017, S. 106). Dies gelingt, wenn die Geometrische Algebra durch komplexe und quaternionenartige Strukturen ausgedrückt und so tief in komplexen Zahlen verborgen präsentiert wird.

Da Lernende in Schule und Hochschule derzeit extrem stark durch die Mathematik komplexer Zahlen vorgeprägt werden, ist ein solches Vorgehen didaktisch gerechtfertigt. Dieses Vorgehen ist zudem ethisch legitim und moralisch gerechtfertigt, da die Mathematik komplexer Zahlen derzeit in Schule und Hochschule nur lückenhaft und extrem einseitig präsentiert wird. Wichtigster Kritikpunkt ist hier die Behandlung der komplexen Konjugation. Diese wird allenfalls geometrisch als Spiegelung an der reellen Achse der komplexen Zahlenebene thematisiert. Eine Diskussion der algebraischen Auswirkungen als versteckte Modellierung anti-kommutativer oder nicht-kommutativer Strukturen unterbleibt derzeit leider.

Fachlicher Hintergrund: Verfremdung und Verschleierung Geometrischer Produkte
Im zweidimensionalen Raum kann das Geometrische Produkt zweier rein räumlicher Vektoren $\mathbf{a} = a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y$ und $\mathbf{b} = b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y$ (Horn 2014 & 2018) durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\sigma_x^2 = 1$ in ein Produkt komplexer Zahlen überführt werden, wenn der Bivektor $i = \sigma_x\sigma_y$ als imaginäre Basiseinheit mit $i^2 = (\sigma_x\sigma_y)^2 = -1$ gedeutet wird:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\sigma_x^2\,\mathbf{b} = (a_x - a_y\,\sigma_x\sigma_y)\,(b_x + b_y\,\sigma_x\sigma_y) = (a_x + i\,a_y)^*\,(b_x + i\,b_y) = a^*\,b$$

Analog kann in einer zweidimensionalen Raumzeit das Geometrische Produkt aus zwei raumzeitlichen Vektoren $\mathbf{a} = a_t\,\gamma_t + a_x\,\gamma_x$ und $\mathbf{b} = b_t\,\gamma_t + b_x\,\gamma_x$ durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\gamma_t^2 = 1$ in ein pseudo-komplexes Produkt überführt werden, wenn der Bivektor $j = \gamma_t\gamma_x$ als pseudo-imaginäre, also im Sinne von (Schwerdtfeger 1979, App. 4-b), (Borota et al. 2000 & 2002) reellwertige Basiseinheit mit $j^2 = (\gamma_t\gamma_x)^2 = +1$ gedeutet wird:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\gamma_t^2\,\mathbf{b} = (a_t - a_x\,\gamma_t\gamma_x)\,(b_t + b_x\,\gamma_t\gamma_x) = (a_t + j\,a_x)^*\,(b_t + j\,b_x) = a^*\,b$$

Als einfaches, fachliches Fazit ist zu folgern: Jedes Geometrische Produkt **a b** kann eindeutig als Produkt a*b einer komplex bzw. pseudo-komplex konjugierten Zahl a* und einer komplexen bzw. pseudo-komplexen Zahl b geschrieben werden.

Es ist aber auch noch ein weiteres, kontroverses Fazit zu ziehen: **Die komplexe Konjugation wurde erfunden, damit wir nicht-kommutative Strukturen mit Hilfe kommutativer Größen modellieren können.** Diese zentrale Aussage wird hier fett gedruckt, denn in üblichen Darstellungen zur Mathematik komplexer Zahlen wird sie komplett unterschlagen. Mit anderen Worten: Immer dann, wenn Mathematikerinnen und Mathematiker behaupten, sie verwenden beim Rechnen mit komplexen Zahlen nur kommutative Größen, täuschen sie sich und uns, sobald sie Produkte bilden, in denen ein Faktor komplex konjugiert ist. Auf dem Papier scheint dann zwar noch alles schön kommutativ. Die dahinter stehende Struktur ist es jedoch nicht, da dann tatsächlich nicht-kommutative Strukturen beschrieben und dargestellt werden.

Als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker sollten wir bei Produkten der Form a*b (oder quantenmechanisch gewendet $\psi^*\varphi$) also vorsichtig sein, denn die Modellierung mathematisch nicht-kommutativer Strukturen durch kommutative Größen ist – in meinen Augen (Horn 2019) – ein mathematisch hässliches Konzept. Sobald die komplexe Konjugation verwendet wird, wird die konzeptuelle Trennung zwischen Kommutativität und Anti-Kommutativität aufgehoben. Es entsteht ein strukturloses Symmetrie-Gemansche.

Dieses gilt es, im letzten Schritt sinnvoll aufzulösen. Vor uns liegen somit zwei Arbeitsaufträge. Der erste Arbeitsauftrag lautet, wie der Titel dieses Beitrags sagt: Verstecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen. Logisch zwingend sollte sich daran der zweite Arbeitsauftrag anschließen: Entdecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen. Ziehen wir also den Schleier von den komplexen Zahlen und legen offen, wie sie missbraucht werden: Sie werden missbraucht zur Verschleierung anti-kommutativer oder nicht-kommutativer Größen mit Hilfe der komplexen Konjugation.

Geometrische Produkte in vierdimensionalen Welten

Die Welt, in der wir leben, scheint räumlich dreidimensional und raumzeitlich vierdimensional. Es ist also sinnvoll, den oben beschriebenen und zweidimensional formulierten Ansatz zu verallgemeinern. Dabei wird sich erneut zeigen, dass Grassmann konzeptionell ehrlicher ist als Hamilton.

Während Grassmann alle vier Basisvektoren, also auch den zeitlichen Basisvektor γ_t, als zueinander anti-kommutativ und somit geometrisch orthogonal stehend beschreibt, täuscht Hamilton in seinen Quaternionen vor, dass der skalar beschriebene (in moderner Sichtweise also zeitliche) Anteil eines Quaternions mit allen anderen Anteilen vertauscht. Durch die Einführung konjugierter Quaternionen schummelt Hamilton diese vordergründige Kommutativität weg und modelliert – ohne es zu merken – eine auch zeitlich anti-kommutative Struktur.

Im vierdimensionalen Raum kann das Geometrische Produkt zweier rein räumlicher Vektoren $\mathbf{a} = a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3$ und $\mathbf{b} = b_0\,\sigma_0 + b_1\,\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\,\sigma_3$ durch mittige Einmultiplikation eines neutralen Elements $\sigma_0^2 = 1$ in ein Produkt quaternionenartiger Zahlen überführt werden, wenn die Bivektoren $i_1 = \sigma_0\sigma_1$, $i_2 = \sigma_0\sigma_2$ und $i_3 = \sigma_0\sigma_3$ als quaternionenartige Basiseinheiten mit $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$ gedeutet werden:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\sigma_0^2\,\mathbf{b} = (a_0 - a_1\,\sigma_0\sigma_1 - a_2\,\sigma_0\sigma_2 - a_3\,\sigma_0\sigma_3)\,(b_0 + b_1\,\sigma_0\sigma_1 + b_2\,\sigma_0\sigma_2 + b_3\,\sigma_0\sigma_3)$$
$$= (a_0 + i_1\,a_1 + i_2\,a_2 + i_3\,a_3)^*\,(b_0 + i_1\,b_1 + i_2\,b_2 + i_3\,b_3) = a^*\,b$$

Analog kann in einer vierdimensionalen Raumzeit das Geometrische Produkt aus zwei raumzeitlichen Vektoren $\mathbf{a} = a_0\,\gamma_0 + a_1\,\gamma_1 + a_2\,\gamma_2 + a_3\,\gamma_3$ und $\mathbf{b} = b_0\,\gamma_0 + b_1\,\gamma_1 + b_2\,\gamma_2 + b_3\,\gamma_3$ durch mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\gamma_0^2 = 1$ in ein Produkt pseudo-quaternionischer Zahlen überführt werden, wenn die Bivektoren $j_1 = \gamma_0\gamma_1$, $j_2 = \gamma_0\gamma_2$ und $j_3 = \gamma_0\gamma_3$ als pseudo-quaternionische, also reellwertige Basiseinheiten mit $j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = +1$ gedeutet werden:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\gamma_0^2\,\mathbf{b} = (a_0 - a_1\,\gamma_0\gamma_1 - a_2\,\gamma_0\gamma_2 - a_3\,\gamma_0\gamma_3)\,(b_0 + b_1\,\gamma_0\gamma_1 + b_2\,\gamma_0\gamma_2 + b_3\,\gamma_0\gamma_3)$$
$$= (a_0 + j_1\,a_1 + j_2\,a_2 + j_3\,a_3)^*\,(b_0 + j_1\,b_1 + j_2\,b_2 + j_3\,b_3) = a^*\,b$$

Auch bei höher-dimensionaler Verallgemeinerung folgt also zwingend: Jedes Geometrische Produkt **a b** kann eindeutig als Produkt a*b einer quaternionenartigen bzw. pseudo-quaternionisch konjugierten Zahl a* und einer quaternionenartigen bzw. pseudo-quaternionischen Zahl b geschrieben werden.

Und erneut: Die komplexe Konjugation wurde erfunden, damit wir mogeln und nicht-kommutative Strukturen mit Hilfe kommutativer Größen modellieren können.

Quaternionen sind wirklich hässlich!

Abschließend soll noch kurz auf die in den vorangegangenen Abschnitten gewählte Sprachregelung eingegangen werden. Konzeptionell unglücklich – oder hässlich (Horn 2019) – ist im Bereich der komplexen Zahlen lediglich die Nutzung einer komplexen Konjugation. Die komplexen Zahlen ohne komplexe Konjugation stellen das dar, was sie sind: kommutativ und geometrisch konsistent.

Anders sieht es mit den Quaternionen aus, denn sie spiegeln den konzeptionellen Konflikt zwischen der geometrischen Ideengestaltung Hamiltons und Grassmanns wieder. Deshalb wurde in den vergangenen Abschnitten die Bezeichnung quaternionenartige (und nicht: quaternionische) Basiseinheiten i_1, i_2, i_3 gewählt, die anti-kommutativ sind:

$$i_1\,i_2 = -\,i_2\,i_1 = \sigma_2\sigma_1 \neq i_3 \qquad i_2\,i_3 = -\,i_3\,i_2 = \sigma_3\sigma_2 \neq i_1 \qquad i_3\,i_1 = -\,i_1\,i_3 = \sigma_1\sigma_3 \neq i_2$$

Diese Basiseinheiten sind nicht quaternionisch, denn sie folgen nicht der geometrisch absurden Konvention Hamiltons, der das Produkt zweier Basisgrößen (die in seinen Augen Basisvektoren sind) erneut als Basisvektor zu deuten. Vielmehr sollte die geometrisch fundierte Sichtweise von Grassmann zum Tragen kommen, der das Produkt zweier vektorieller, also eindimensionaler Basiseinheiten als bivektorielle, also flächenartig zweidimensionale Basiseinheiten ansieht. Somit ist gerechtfertigt, dass Sarton feststellt: „… Grassmann was a little ahead of Hamilton, and his doctrine was from the beginning deeper and more inclusive“ (Sarton 1944, S. 327).

Diese tiefere und umfassendere Einsicht Grassmanns in geometrische Zusammenhänge zeigt sich auch im Scheitern Hamiltons (Baez 2002), mit Tripletts der Form $a = a_0 + i_1\,a_1 + i_2\,a_2$ (Vince 2011, S. 48) Rotationen im dreidimensionalen Raum zu modellieren. Selbstverständlich ist dies möglich. Auf Grundlage der Ausdehnungslehre Grassmanns können Reflexionen (Horn 2015) und damit Rotationen als zweifache Reflexionen problemlos durch Triplett-Multiplikationen der Form $a_{ref} = (b^*\,a)^*\,b = b\,a^*\,b$ dargestellt werden. Man muss sie lediglich in triplett-förmig verallgemeinerten komplexen Zahlen (also Tripelonen, Triplionen oder lateinisch ansprechender: Tertionen anstelle von Quaternionen) verstecken.

Literatur

Baez, J.C. (2002). The Octonions. arXiv:math.RA/0105155v4 [23.04.2002]

Borota, N.A., Flores, E. & Osler, T.J. (2000). Spacetime Numbers The Easy Way. Mathematics and Computer Education, Vol. 34, No. 2, 159-168

Borota, N.A. & Osler T.J. (2002). Functions of a Spacetime Variable. Mathematics and Computer Education, Vol. 36, No. 3, 231-239

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press

Krüger, D., Parchmann, I. & Schecker, H. (Hrsg.) (2018). Theorien in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung. Berlin: Springer

Hestenes, D. (2002). New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, New York: Kluwer

Hestenes, D. (2003a). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, 104-121

Hestenes, D. (2003b). Spacetime Physics with Geometric Algebra. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, 691-714

Hestenes, D. (2013). Modeling Theory for Math and Science Education → 3.8 Epilogue: A New Generation of Mathematical Tools. In R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford (Hrsg.), Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, ICTMA 13 Proceedings. Dordrecht: Springer, 13-41

Hestenes, D. (2015). Space-Time Algebra. 2. Auflage, Cham, Heidelberg, New York: Springer

Horn, M.E. (2014). An Introduction to Geometric Algebra with some Preliminary Thoughts on the Geometric Meaning of Quantum Mechanics. In D. Schuch & M. Ramek (Hrsg.), Symmetries in Science XVI, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2013. Journal of Physics: Conference Series, Vol. 538 (2014) 012010. Bristol: IOP Publishing

Horn, M.E. (2015). Sandwich Products and Reflections. In H. Grötzebauch & V. Nordmeier (Hrsg.), PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal 2015, Beitrag DD 17.7, URL [17.12.2015] www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642

Horn, M.E. (2018). Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. In D. Schuch & M. Ramek (Hrsg.), Symmetries in Science XVII, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2017. Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1071 (2018) 012012. Bristol: IOP Publishing

Horn, M.E. (2019). If You Split Something into Two Parts, You Will Get Three Pieces: The Bilateral Binomial Theorem and its Consequences. Symposiumsbeitrag Symmetries in Science XVIII am 9. Aug. 2019 in Bregenz. Zur Veröffentlichung geplant bei Journal of Physics: Conference Series. Bristol: IOP Publishing

Nerdel, C. (2017). Grundlagen der Naturwissenschaftsdidaktik. Kompetenzorientiert und aufgabenbasiert für Schule und Hochschule. Berlin: Springer Spektrum

Parra Serra, J.M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, 819-834

Schwerdtfeger, H. (1979). Geometry of Complex Numbers → Appendix 4: Complex Numbers in Geometry by I. M. Yaglom. New York: Dover Publications, 189-190

Sarton, G. (1944). Grassmann – 1844. Isis, Vol. 35, No. 4, 326-330

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York, Oxford: Oxford University Press

Vince, J. (2011). Quaternions for Computer Graphics. London, Dordrecht, Heidelberg: Springer