Martin Erik Horn HTW Berlin

Verstecken wir die Geometrische Algebra hinter reellwertigen Matrizen!

Wie auf der vergangenen GDCP-Jahrestagung in Wien diskutiert wurde, sind die emotionalen Hürden eines Aufgreifens der Geometrischen Algebra durch die hochschulischen Didaktiken im deutschsprachigen Raum bisher relativ groß (Horn, 2020b). Weder im mathematikdidaktischen Bereich noch in den Naturwissenschaftsdidaktiken findet hierzulande eine tiefer gehende Erörterung der auf Hestenes zurückgehenden modernen Formulierung der Geometrischen Algebra (Hestenes, 2003 & 2015) statt. Anders ist dies im englischen Sprachraum, in der eine weit gefächerte und breit geführte Auseinandersetzung mit der Geometrischen Algebra (Snygg, 1997), (Doran & Lasenby, 2003) (Bayro-Corrochano, 2019 & 2020) zu beobachten ist.

Deshalb wurde in (Horn, 2020 b) vorgeschlagen, die Geometrische Algebra durch komplexe und quaternionenartige Strukturen auszudrücken. Die Geometrische Algebra wird dann hinter einer Mathematisierung versteckt, die Lernenden bereits bekannt ist und die die emotionale geprägte Zurückhaltung – eine offenbar tief sitzende Angst vor dem didaktisch Ungewohnten und fachlich Neuen – reduzieren kann. Damit wird der didaktisch trivialen Erkenntnis gefolgt, dass umlernen schwieriger ist als neu lernen. Und beides ist deutlich schwieriger als auf bereits Gelerntem aufzubauen.

Allerdings sind mit einer komplexwertigen Formulierung physikalischer Gesetze mehrere epistemologische und philosophisch grundlegende Probleme verbunden. Zum einen behauptet der Autor aus guten Gründen, dass bei einer naiven Nutzung komplexer und quaternionischer Strukturen unter Einbindung der komplexen Konjugation eine dramatische mathematische Fehlvorstellung transportiert wird. In mathematischen Lehrbüchern wird durchgängig darauf verwiesen, dass die komplexe Multiplikation kommutativ sei. Dies ist jedoch offenkundig falsch, wenn mit komplex konjugierten Größen multipliziert wird (Horn, 2019 & 2020 a, c, d). Wir bringen unseren Schülerinnen und Schüler sowie Studierenden also etwas grob Fehlerhaftes bei.

Zum anderen stehen wir vor dem philosophischen Problem, dass jede physikalische Messung, die wir vornehmen, reellwertige Messergebnisse liefert. Diese reellwertigen Messergebnisse werden immer erst im Zuge einer theoretischen Modellierung und mathematischen Umgestaltung mit komplexen oder quaternionenartigen Größen verknüpft. In den vergangenen Jahrhunderten fand so ein schleichender Prozess der Ablösung der Mathematik von der Anschauung statt (Russell, 1918, S. 75: „Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about…“) (Cartier et al., 2019), der mit einer immer größeren Entfremdung von Mathematik und Physik verbunden ist.

Der Grund für diese Entfremdung ist naheliegend: Je großartiger, umfangreicher und vor allem je abstrakter das Gedankengebäude der Mathematik wird, desto ausgefeilter, verworrener und vor allem undurchsichtiger werden die Wege, die von einer physikalischen Messung zur mathematisch ausformulierten Theorie führen.

Im Bereich der komplexen Zahlen und Quaternionen kann allerdings ein Teil dieser Abstraktheit umgangen und zugunsten einer reellwertigen Sichtweise vermieden werden. Imaginäre Größen sollten gerade nicht nur aus Bequemlichkeitsgründen genutzt werden, weil sich damit einfacher rechnen lässt. Wir können es besser, wie der Mathematiker und Wissenschaftsphilosoph Stillwell darlegt: „However, it is possible to do better than this. We can give a convincing interpretation of imaginary numbers, which shows them to be just as 'real' as ordinary numbers (…). More conservatively, one can show how to eliminate imaginary numbers, from any argument that uses them, in favour of ordinary numbers" (Stillwell, 2019, S. 19). Diesem Ansatz soll in diesem Beitrag gefolgt werden: die Geometrische Algebra, also auch Pauli- und Dirac-Algebra als drei- bzw. vier- oder fünfdimensionale Spezialfälle, lassen sich mit Hilfe von Matrizen ausdrücken, die keinerlei komplexe Belegungen aufweisen.

Der mathematisch-geometrische Ausgangspunkt wird durch die beiden nur mit reellen Belegungen versehenen (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (Horn 2012), die als Basisvektoren einer euklidischen Ebene gedeutet werden können. Wir bewegen uns hier also in einer Welt, die vektoriell frei von imaginären Größen und durch $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{1}$ mit einer Signatur von (+; +) rein raumartig ist. Dennoch lassen sich komplexwertige Beziehungen formulieren, denn das Produkt der beiden Basisvektoren

$$\mathbf{e_1 e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{e_1 e_2})^2 = -\,\mathbf{e_1}^2\,\mathbf{e_2}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\,\mathbf{1}$$

stellt als Einheits-Bivektor ein imaginäres, flächenartiges Basiselement dar.

Man darf aber auch relativistisch denken und durch die beiden Basisvektoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_0} = \mathbf{e_1 e_2}$ eine pseudo-euklidische, raumzeitliche Ebene der Signatur (+ ; –) beschreiben, die auf das raumzeitliche Flächenelement $\mathbf{e_1 e_0} = \mathbf{e_2}$ führt. Aber auch diese Darstellung basiert auf (2 x 2)-Matrizen, die rein reellwertige Eintragungen aufweisen.

Eine solche Herangehensweise wurde im Sommersemester 2020 an der HTW Berlin in Ergänzung zur konventionellen Darstellung von Vektoren in der Mathematik-Grundlagen-ausbildung des Studiengangs Ingenieurinformatik (Horn, 2021) eingeführt. Rein räumliche bzw. raumzeitliche Vektoren werden dann im zweidimensionalen Fall geschrieben als:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{2d\text{-}Raum}} = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_{\mathbf{2d\text{-}Raumzeit}} = ct\,\mathbf{e_0} + x\,\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} x & ct \\ -ct & -x \end{pmatrix}$$

Als ein wichtiges Zwischenergebnis wird dabei festgestellt, dass im Rahmen dieser Mathematisierung ein dritter, rein räumlicher Basisvektor mi $\mathbf{e_3}^2 = \mathbf{1}$ nicht existiert, falls nur reellwertige Matrizen zugelassen werden. Um ohne die Nutzung komplexwertig belegter Matrizen höher-dimensionale Strukturen zu gestalten, ist eine Erweiterung des Ansatzes notwendig.

Eine solche Erweiterung gelingt mit Hilfe des ursprünglich von Zehfuss eingeführten (Zehfuss, 1858) und heute auch als Kronecker-Produkt (Steeb, 1991) bekannten direkten Produkts zweier Matrizen. Auch hier handelt es sich nicht um eine formale Erweiterung des Zahlensystems (Wir arbeiten immer noch nur mit reellen Zahlen!), sondern um die Einführung einer zusätzlichen Verknüpfung zwischen diesen reellen Zahlen – und damit handelt es sich um die Einführung einer zusätzlichen mathematischen Operation.

Auf dieser Grundlage lassen sich 16 Basiselemente $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ konstruieren, von denen dann, den entsprechenden Binomialkoeffizienten folgend, genau eins als dimensionsloses Einheitsskalar, genau 4 als eindimensionale Basisvektoren, genau 6 als zweidimensionale Basis-Bivektoren bzw. orientierte Einheits-Flächenstücke, wieder genau 4 als dreidimensionale Basis-Trivektoren bzw. orientierte Einheits-Volumenelemente und genau eins als vierdimensionaler Basis-Quadvektor bzw. orientiertes Einheits-Hypervolumenelement gedeutet werden kann (Horn, 2012).

Das im voranstehenden Abschnitt Beschriebene klingt trivial, stellt aber einen erheblichen didaktischen Mehrwert dar: Jedes der 16 Basiselemente ist eindeutig fassbar. Hätten wir komplexwertige Belegungen zugelassen, so wären beispielsweise direkte Produkte aus dem Einheitsskalar, also der (2 x 2)-Einheitsmatrix **1**, und dem Einheits-Pseudoskalar $\mathbf{I} = i\,\mathbf{1}$ nicht unterscheidbar: $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = (i\,\mathbf{1}) \otimes (i\,\mathbf{1}) = -\,\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Durch Zulassen komplexwertiger Belegungen führt das direkte Produkt von zwei Basiselementen zur Redundanz unter den neu erzeugten Basiselementen. Und damit führen komplexwertige Belegungen zu Verwirrung.

Und es zeigt sich darüber hinaus auch ein erkenntnistheoretisch bedeutender Mehrwert: Die 16 Basiselemente lassen sich nur als Raumzeiten interpretieren (Horn, 2012). Rein räumliche Räume oder rein zeitliche Räume der Signaturen (+; +; + ;+) bzw. (–: –; –; –) existieren nicht. Im Rahmen der vorgeschlagenen Mathematisierung gilt: **Time must exist! Space must exist!** Die Koexistenz von Raum und Zeit erfährt hier eine mathematische Begründung. Raum alleine oder Zeit alleine existieren nicht im Vierdimensionalen. Es gelingt nur, Raumzeiten der Signaturen (+: –; –; –), (+: +; –; –) oder (+: +; +; –) zu konstruieren.

Einschub und Ausblick: Liebe Mathematikdidaktiker/innen, liebe Mathematiker/innen, bitte, bitte schreibt nicht: „Solche Größen wurden in der Tat im 19. Jahrhundert unter dem Namen Vektor eingeführt; man kann sie aber nur addieren und subtrahieren, nicht multiplizieren und dividieren. Um diesen Mangel zu beheben, musste man eine weitere Dimension hinzunehmen“ (Eschenburg 2017, S. 62, Fußnote 10). Dies ist ein Graus! Natürlich kann man Vektoren multiplizieren und dividieren (Hestenes, 2003), (Doran & Lasenby 2003), (Gull et al., 1993). Bitte, bitte, lest endlich die Ausdehnungslehre (Grassmann, 1844) und nehmt sie ernst. Da steht schon (fast) alles drin. Und natürlich muss man keine weitere Dimension hinzunehmen, um Rotationen dreidimensionaler Vektoren im dreidimensionalen Raum durch Multiplikation von Vektoren zu beschreiben (Horn, 2014).

Man darf es aber. Es ist erlaubt, weitere Dimensionen hinzuzunehmen, und das ist auch das Fernziel dieses Ansatzes. In einer weiteren Ausarbeitung soll die konforme Geometrische Algebra auf Grundlage reellwertiger Matrizen dargestellt werden, so ähnlich wie dies beispielsweise durch (Hestenes 2001) und später dann (Vince, 2008) oder (Hildenbrand, 2013) und anderen auch gemacht wird.

Literatur

Bayro-Corrochano, E. (2019). Geometric Algebra Applications. Vol. 1, Cham: Springer International

Bayro-Corrochano, E. (2020). Geometric Algebra Applications. Vol. 2, Cham: Springer Nature Switzerland

Cartier, P., Dhombres, J., Heinzmann G. & Villani, C. (2016). Freedom in Mathematics. New Delhi: Springer

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press

Eschenburg, J.-H. (2017). Sternstunden der Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum

Grassmann, H. (1844). Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Verlag Otto Wigand

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. Foundations of Physics 23 (9), 1175-1201

Hestenes, D. (2001). Old Wine in New Bottles: A New Algebraic Framework for Computational Geometry. In: E. Bayro-Corrochano & G. Sobczyk (Hrsg.), Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering. New York: Springer Science + Business Media, 3-17

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics 71 (2), 104-121

Hestenes, D. (2015). Space-Time Algebra. 2. Auflage, Cham, Heidelberg, New York: Birkhäuser/Springer

Hildenbrand, D. (2013). Foundations of Geometric Algebra Computing. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Horn, M.E. (2012). Living in a World Without Imaginaries. Symmetries in Science XV, Journal of Physics: Conference Series 380 (2012) 012006. Bristol: IOP Publishing

Horn, M.E. (2014). An Introduction to Geometric Algebra with some Preliminary Thoughts on the Geometric Meaning of Quantum Mechanics. Symmetries in Science XVI, Journal of Physics: Conference Series 538 (2014) 012010. Bristol: IOP Publishing

Horn M E (2019). Cheating with Complex Numbers. Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen. Preprint viXra:1911.0023 (01.11.2019)

Horn, M.E. (2020a). If You Split Something into Two Parts, You Will Get Three Pieces: The Bilateral Binomial Theorem and its Consequences. Symmetries in Science XVIII, Journal of Physics: Conference Series 1612 (2020) 012013. Bristol: IOP Publishing

Horn, M.E. (2020b). Verstecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen! In: S. Habig (Hrsg.), Naturwissenschaftliche Kompetenzen in der Gesellschaft von morgen. Tagungsband der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik 2019 in Wien, GDCP Band 40, Universität Duisburg-Essen, 904-907

Horn, M.E. (2020c). Die komplexe Konjugation aus physikalischer Sicht. Phydid B – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/1084 (22.09.2020)

Horn, M.E. (2020d). Äquivalenzumformungen in der Geometrie am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras. In: H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2020 auf der 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM-Verlag, 441-444

Horn, M.E. (2021). Matrizenrechnung für doofe Computer. Ergänzungsfolien des Kurses „Mathematik 1“ des Bachelor-Studiengangs Ingenieurinformatik an der HTW Berlin, Sommersemester 2020. Zur Veröffentlichung vorgesehen als ergänzendes Material in PhyDid B – Beiträge zur DPG-Jahrestagung.

Russell, B. (1918). Mysticism and Logic and Other Essays. Plymouth: William Brendon and Son

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York: Oxford University Press

Steeb, W.-H. (1991). Kronecker Product of Matrices and Applications. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag

Stillwell, J. (2019). A Concise History of Mathematics for Philosophers. Elements in the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press

Vince, J. (2008). Geometric Algebra for Computer Graphics. London: Springer-Verlag

Zehfuss, J.G. (1858). Über eine gewisse Determinante. Zeitschrift für Mathematik und Physik 3, 298-301