Martin Erik Horn[1] [1]iu – Internationale Hochschule, Campus Berlin

Orthogonale Regression in der Raumzeit

In empirisch arbeitenden Wissenschaftsdisziplinen stellt die Regressionsanalyse ein wichtiges Werkzeug zur Klärung von Abhängigkeiten zwischen unterschiedlichen Variablen dar. Dabei spiegelt sich in der Geschichte der Entwicklung von Regressionsansätzen und von Techniken zur Bestimmung kleinster Quadrate die ganze Zerrissenheit unserer eigenen Disziplin, der Physikdidaktik, wieder.

Zum einen sind da die Ansätze, die aus den uns zugeordneten Fachdisziplinen, der Physik und der Astronomie, kommen, und die die Fehlerhaftigkeit von Messungen im Zentrum der wissenschaftlichen Analyse sehen. Diese den Naturwissenschaften entstammenden Herangehensweisen sind „gänzlich andersartig“ (Desrosières, 2005, S. 71) als die später in den Geistes- und Sozialwissenschaften, also auch den Fachdidaktiken, verbreiteten Ansätze, die Kausalbeziehungen in den Mittelpunkt von Regressionsansätzen stellen.

Entsprechend viele Erfinder und Mitgestalter der Methode der kleinsten Quadrate gibt es, beispielsweise Legendre, Gauß, Laplace ((Desrosières, 2005), (Stigler, 1986) und später Weisbach (Lösler & Eschelbach, 2020). Die von Tent dem Gymnasiasten Gauß in den Mund gelegten Worte beschreiben dabei in gleichzeitig eindrücklich wie problematischer Weise das Dilemma dieses Ansatzes: „If I squared all those differences, the ones that are further away would count more and that would also make all the numbers positive. I think that might be better“ (Tent, 2006, S. 73).

Ein Problem dabei ist, dass der Begriff des Abstands (Deza & Deza, 2016) ungeklärt bleibt als „difference between that ‚true value‘ and each measurement“ (Tent, 2006, S 72/73). Wir wissen meist einfach nicht, ob der ‚echte Wert‘ vertikal, horizontal oder in anderer Richtung vom Messwert entfernt positioniert ist. Dies führt dazu, dass ausführlich oft nur die einfache lineare Regression in vertikaler Richtung (Frost, 2018), manchmal ergänzt um eine durch Variablenvertauschung modellierte horizontale lineare Regression (siehe z.B. Ferschl, 1985, Kap. 5.4) thematisiert wird ohne näher auf weitere Ansatzmöglichkeiten einzugehen.

Infolgedessen ist das Verhältnis von Fachmathematikern zur orthogonalen Regression durchaus ambivalent. Einerseits werden die erfreuliche Symmetrie zwischen beiden Variablen und die Anschlussfähigkeit bezüglich multivariater Verfahren (Ferschl, 1985, S. 242) positiv hervorgehoben. Andererseits wird negativ auf die nicht existierende Skaleninvarianz und die „unwieldy form of the best-fit parameters“ (Weisstein, 1999, S. 1046), also die unhandliche und mathematisch sperrige Darstellung verwiesen – was bei einigen Fachkollegen sogar zu der Einschätzung führt, dass „mathematical statistics combines the worst aspects of mathematics with the worst aspects of statistics“ (Bingham & Fry, 2010, S. ix).

Deutlich positiver fällt die Einschätzung der Mathematikdidaktik aus. Beispielsweise betonen Brüstle und Dippon: „Erst die Kenntnis alternativer Methoden, wie die der horizontalen Regression, der orthogonalen Regression oder der Median-Regression, ermöglicht den

Lehrerinnen und Lehrern ein tieferes Verständnis der üblichen Regressionsmethode einschließlich ihres Anwendungspotentials und ihrer Beschränkungen“ (Sproesser et al., 2014, S. 45). Ohne ein Verständnis der orthogonalen Regression ist ein tiefgreifendes Verstehen der konventionellen, also vertikalen linearen Regression unmöglich.

Ähnlich konsequent sollten wir auch die physikdidaktische Einschätzung fassen, denn seit Einstein (Trageser, 2018), (Pauli, 2000) gilt: Erst ein Verständnis der Raumzeit ermöglicht Lernenden ein tieferes Verständnis des Raums. Und deshalb gilt auch: Ohne ein Verständnis der orthogonalen Regression in der Raumzeit ist ein tiefgreifendes Verstehen der konventionellen orthogonalen Regression, also der orthogonalen Regression im Euklidischen Raum unmöglich.

Zentraler Gesichtspunkt ist hier wieder die unklare Bedeutung des Begriffes „Abstand“. Gauß hat nämlich durchaus nicht recht, wenn er Abstandsquadrate durchgängig als positiv ansieht, da in der Raumzeit Abstände unterschiedlicher Norm existieren. Es gibt zeitartige Abstände, die positiv quadrieren und raumartige Abstände mit negativen Abstandsquadraten. Wir suchen also entweder das Minimum der Summe zeitartiger, positiver Quadrate oder das Maximum der Summe raumartiger, negativer Quadrate, da betragsmäßig immer kleiner werdende negative Quadrate formalmathematisch immer größer werden.

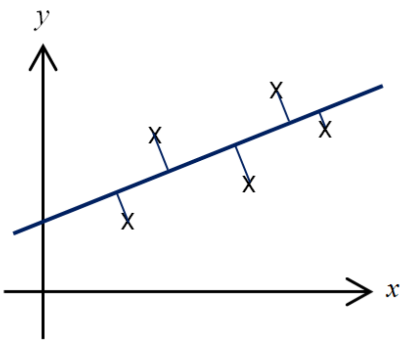

Abb. 1: Orthogonale Regression im rein räumlichen Raum

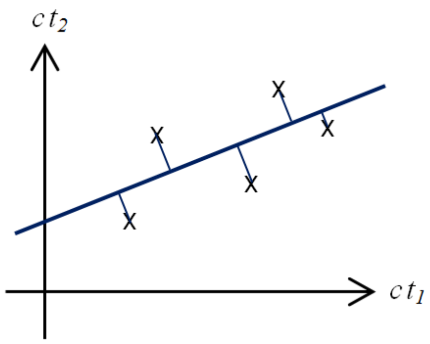

Abb. 2: Orthogonale Regression in einer zweidimensionalen Zeit

Die Summe der quadrierten orthogonalen Abstände (Fehlerquadrate) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m x_i - b)^2}{1+m^2}$ führt sodann durch Extremwertbildung auf die üblichen Regressionsparameter der orthogonalen Regression, wobei in der rein zeitlichen Situation physikalisch motiviert $x_i = ct_{1i}$ und $y_i = ct_{2i}$ gesetzt werden kann:

Steigung: $m = \frac{{s_y}^2 - {s_x}^2 \pm \sqrt{\left({s_x}^2 - {s_y}^2\right)^2 + 4\, {s_{xy}}^2}}{2\, s_{xy}}$ y-Achsenabschnitt: $b = \bar{y} - m\bar{x}$

Erst im Kontext einer raumzeitlichen Denkweise wird die korrekte Interpretation der beiden unterschiedlichen Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck im Zähler der Steigung *m* sinnhaft möglich: Da rein räumliche Abstände negativ quadrieren, führen die nun negativen Varianzen ${s_x}^2$ und ${s_y}^2$ und die nun negative Kovarianz s_{xy} nur zusammen mit einem negativen Wurzelwert auf die korrekte Steigung *m*, die – wie in den Abb. 1 und 2 zu erkennen – mit der Steigung der zweidimensional rein zeitlichen Situation übereinstimmt.

In einer raumzeitlich gemischten Regression lassen sich deshalb die unterschiedlichen Vorzeichen der Wurzel direkt mit den beiden möglichen Fällen einer entweder raumartigen (siehe Abb. 3) oder zeitartigen Regressionsgeraden (siehe Abb. 4) verknüpfen. Denn bei einer raumartigen Regressionsgeraden sind die orthogonalen Abstände zeitartig und quadrieren positiv (also wird der positive Wurzelausdruck benötigt), während bei einer zeitartigen Regressionsgeraden die orthogonalen Abstände raumartig sind und negativ quadrieren (so dass der negative Wurzelausdruck benötigt wird).

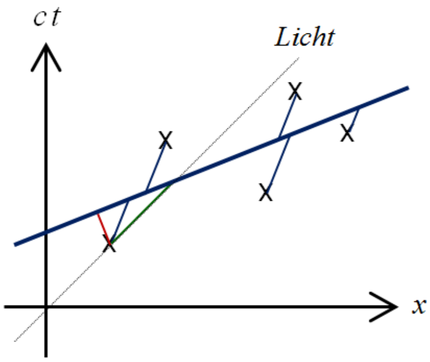

Abb. 3: Raumartige Regressionsgerade bei orthogonaler raumzeitlicher Regression

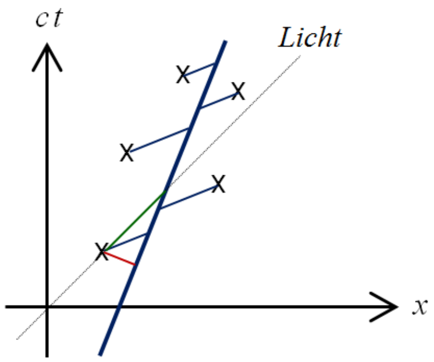

Abb. 4: Zeitartige Regressionsgerade bei orthogonaler raumzeitlicher Regression

Hier können jetzt relativistisch motiviert Argumentationsweisen in Statistik-Kursen auch mit Studierenden physikferner Fächer thematisiert werden, beispielsweise in (Horn, 2021b) mit Informatik-Studierenden. Die beiden rot eingezeichneten Abstände stehen nun nicht mehr senkrecht zu den Regressionsgeraden der Abb. 3 und 4. Orthogonal sind stattdessen die blau gezeigten Abstände, die raumzeitlich bedingt (und zur Verblüffung der Studierenden) die jeweils größten Abstände besitzen. Diese Abstände sind auch deutlich länger als die beiden grün eingezeichneten lichtartigen Abstände, die naturgemäß eine Länge von Null aufweisen.

Die Summe der quadrierten orthogonalen raumzeitlichen Abstände $\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - mx_i - b)^2}{1-m^2}$ (also der raumzeitlichen Fehlerquadrate) führt durch Extremwertbildung wieder auf die üblichen Regressionsparameter der orthogonalen Regression, jetzt mit $y_i = ct_i$ skalar geschrieben als:

Steigung: $m = \frac{{s_y}^2 + {s_x}^2 \pm \sqrt{\left({s_x}^2 + {s_y}^2\right)^2 - 4\,{s_{xy}}^2}}{2\,s_{xy}}$ y-Achsenabschnitt: $b = \bar{y} - m\bar{x}$

Es ist erstaunlich, dass eine raumzeitliche Betrachtung der Regression bisher übergangen wurde, so als ob die Variablen, die wir zur empirischen Beschreibung in der Physikdidaktik nutzen, immer und überall Euklidisch agieren. Es darf vermutet werden, dass dem nicht so ist und manche Beziehungen unter Nutzung raumzeitlicher Variablen und eines „Prinzips der größten Quadrate“ überzeugender und mathematisch klarer formuliert werden könnten.

Die Beschreibung der Regression mit Hilfe von Moore-Penrose-Matrizeninversen (Albert, 1972) als Skalarteil von Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninversen (Horn, 2018) modelliert ja nur die Situation im Euklidischen Raum. Die Übertragung dieses Ansatzes in die Raumzeit mit Hilfe raumzeitlicher Matrizeninverse als Skalarteil von Verallgemeinerten Dirac-Algebra-Matrizeninversen (Horn, 2021a) wurde bisher ebenfalls nicht vorgenommen.

Literatur

Albert, A. (1972). Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. New York, London: Academic Press

Bingham, N.H. & Fry, J.M. (2010). Regression. Linear Models in Statistics. London: Springer-Verlag

Desrosières, A. (2005). Die Politik der großen Zahlen. Eine Geschichte der statistischen Denkweise. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Deza, M.M. & Deza, E. (2016). Encyclopedia of Distances. 4. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Ferschl, F. (1985). Deskriptive Statistik. 3. Auflage, Würzburg, Wien: Physica-Verlag

Frost, I. (2018). Einfache lineare Regression. Die Grundlage für komplexe Regressionsmodelle verstehen. Wiesbaden: Springer VS / Springer Fachmedien

Horn, M.E. (2018). Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg, Beitrag DD 02.35

Horn, M.E. (2021a). Dirac-Algebra: Kurz und schmerzlos. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur virtuellen DPG-Frühjahrstagung, Beitrag DD 14.04

Horn, M.E. (2021b). Linear Regression and Orthogonal Regression in Space and Spacetime. OHP Slides for the tutorials “Advanced Statistics – DLMDSAS01” and “Advanced Mathematics – DLMDSAM01” of the Online International Master program “Computer Science” at iu – Internationale Hochschule / International University of Applied Sciences, Campus Berlin, Summer 2021 (Fassung vom 6. Juli 2021)

Lösler, M. & Eschelbach, C. (2020). Orthogonale Regression – Realität oder Isotropie? In: tm – Technisches Messen, De Gruyter Oldenbourg, 87 (10), 637-646

Pauli, W. (2000). Relativitätstheorie. Neu herausgegeben und kommentiert von D. Giulini. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Sproesser, U., Wessolowski, S. & Wörn, C. (Hrsg.) (2014). Daten, Zufall und der Rest der Welt. Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum / Springer Fachmedien

Stigler, S.M. (1986). The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900. Cambridge, Massachusetts & London: The Belknap Press / Harvard University Press

Tent, M.B.W. (2006). The Prince of Mathematics – Carl Friedrich Gauss. Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters

Trageser, W. (Hrsg.) (2018). Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Originalarbeiten zur Relativitätstheorie Einsteins. 2. Auflage, Berlin: Springer Spektrum / Springer Nature. Ursprünglich erschienen unter: Lorentz, H.A., Einstein, A. & Minkowski, H. (1923): Das Relativitätsprinzip – Eine Sammlung von Abhandlungen. 5.Auflage, Leipzig, Berlin: B. G. Teubner

Weisstein, E.W. (1999). CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC, 1045-1049